Formulaire à connaître par cœur

I Analyse

I.1 Fonction exponentielle

I.1.a Premières propriétés

$$\forall x, \exp x > 0 \qquad \exp(0) = 1$$

I.1.b Propriétés algébriques

$$\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b \qquad \exp(-a) = \frac{1}{\exp a} \qquad \exp(a-b) = \frac{\exp a}{\exp b}$$

I.2 Fonctions logarithmiques

I.2.a Premières propriétés

$$\forall x > 0, \forall y : x = \exp y \Leftrightarrow y = \ln x \qquad \ln(\exp(x)) = x \qquad \ln 1 = 0 \qquad \ln \exp = 1$$

I.2.b Propriétés algébriques

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

I.2.c Fonction logarithme décimal

$$\forall x > 0, \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

I.3 Fonction exponentielle de base $a > 0$

I.3.a Définition et conséquence

$$a^x = \exp(x \ln a) \qquad \ln(a^x) = x \ln a$$

I.3.b Propriétés algébriques

$$a^x a^y = a^{x+y} \qquad (a^x)^y = a^{xy} \qquad (ab)^x = a^x b^x \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

I.3.c Fonction racine n-ième

avec $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \geq 0$:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

I.4 Limites usuelles de fonctions

I.4.a Comportement à l'infini

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \exp x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \exp x = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty \qquad \text{Si } \alpha < 0, \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$$

I.4.b Comportement à l'origine

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \qquad \text{Si } \alpha > 0, \lim_{x\to 0} x^\alpha = 0 \qquad \text{Si } \alpha < 0, \lim_{x\to 0} x^\alpha = +\infty$$

I.5 Dérivées et primitives

I.5.a Dérivées de fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de Validité
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$

I.5.b Opérations sur les dérivées

$$(u+v)' = u' + v' \qquad (ku)' = ku' \text{avec } k = cste \qquad (uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (\exp u)' = u' \exp u \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u} \text{avec } u > 0 \qquad (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

I.5.c Équation d'une tangente

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

I.5.d Opérations sur les primitives

$$\int u^n \mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + cste$$

I.6 Suites

I.6.a Suites arithmétiques

U est une suite arithmétique de raison r. Premier terme U_0 ; $U_{n+1} = U_n + r$; $U_n = U_0 + nr$

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

I.6.b Suites géométriques

U est une suite géométrique de raison q.
Premier terme U_0 ; $U_{n+1} = qU_n$; $U_n = U_0 q^n$
3 cas à envisager pour sommer les termes d'une suite géométrique :

- Si $q \neq 1$: $1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- Si $q > 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

II Trigonométrie

II.1 Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$